Concours des 21, 22 et 23 mai 1990 d'admission en 1-ère année à L'INSTITUT NATIONAL
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
MATHÉMATIQUES
(Options M.P)

* * *

On note C l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$. Pour toute fonctions $f \in C$, on pose :

$$I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

L'objet du problème est d'étudier la suite $(I_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et certains séries qui lui sont associées, la partie V spécialisant l'étude au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$ de C formée des fonctions polynômes de degré au plus N ($N \in \mathbb{N}$ fixé).

I - Étude de la suite $(I_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite converge vers 0.
2. On veut établir que $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n(f) = f(1)$.
 - (a) Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\alpha t^n f(t) dt = 0$.
 - (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n(f) = 0$.

- (c) Conclure dans le cas général (c'est-à-dire lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse $f(1) = 0$).
3. Application : on prend $f(t) = e^{-t}$.
 - (a) Calculer $I_n(f)$.

- (b) Déduire de l'étude précédente un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

II - Étude de la série de terme général $[I_n(f)]^2$

1. Montrer, en utilisant I - 2), que cette série converge.

On se propose dans la suite de cette partie de trouver un majorant de $\sum_{n=0}^{\infty} [I_n(f)]^2$.

2. P étant un polynôme à coefficients réels, vérifier l'égalité :

$$\int_{-1}^1 P(x) dx + i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

3. Établir alors les inégalités :

$$\int_0^1 [P(x)]^2 dx \leq \int_{-1}^1 [P(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(on pourra remarquer que $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$)

4. En déduire que pour toute famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $(n + 1)$ réels

$$0 \leq \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{a_k a_l}{k+l+1} \leq \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$$

5. À l'aide de la question précédente et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $f(t)$ et $g(t) = \sum_{k=0}^n I_k(f)t^k$, montrer que pour toute $f \in C$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [I_n(f)]^2 \leq \pi \int_0^{\pi} [f(t)^2] dt.$$

III - Étude de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$

- On suppose, dans cette seule question, que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $f(t) \geq 0$. Montrer que la série converge.
- f étant à nouveau un élément quelconque de C , montrer, en utilisant l'identité

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t},$$

que la série converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$$

- Première application : On suppose que $f(t) = 1$.

Déduire de l'étude précédente une expression simple de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

- Deuxième application : On suppose que $f(t) = \sqrt{t}$.

Déduire de l'étude précédente une expression simple de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

IV - Étude de la série de terme général $I_n(f)$

- Soit g une fonction à valeurs réelles, continue sur $[0, 1[$ et telle que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ soit absolument convergente.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n g(t) dt$ est absolument convergente. On pose alors

$$I_n(g) = \int_0^1 t^n g(t) dt.$$

(b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{\alpha}^1 t^n g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(g) = 0$.

- Soit $f \in C$ telle que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt$ soit absolument convergente. Montrer qu'alors la série de terme général $I_n(f)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt.$$

- Soit $f \in C$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, on ait $f(t) \geq 0$. Montrer qu'alors, si la série de terme général $I_n(f)$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt$, l'égalité de la question précédente étant de nouveau vérifiée.

V - Restriction de l'étude à $\mathcal{P}_N$ (voir introduction)

1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

munit $\mathcal{P}_N$ d'une structure d'espace euclidien.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $I_k : P \mapsto I_k(P)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_N$.
3. Montrer que la famille $(I_k)_{0 \leq k \leq N}$ forme une base $\mathcal{B}$ du dual de $\mathcal{P}_N$,
4. Écrire la matrice de passage A de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}_0$ est la base duale de la base canonique de $\mathcal{P}_N$.
5. On considère l'application h qui, à tout $P \in \mathcal{P}_N$, fait correspondre le polynôme $h(P)$ défini par

$$[h(P)](t) = \sum_{k=0}^N I_k(P)t^k.$$

Montrer que h est un automorphisme de $\mathcal{P}_N$.

Quelle est la matrice de h dans la base canonique de $\mathcal{P}_N$?

6. P et Q étant deux éléments de $\mathcal{P}_N$, calculer $(P|h(Q))$.
En déduire que la matrice A admet (en les comptant avec leur ordre de multiplicité) $N + 1$ valeurs propres réelles strictement positives.

* * *